



A-t-on vraiment besoin d'un modèle probabiliste en ingénierie financière ?

Michel Fliess, Cédric Join, Frédéric Hatt

► To cite this version:

Michel Fliess, Cédric Join, Frédéric Hatt. A-t-on vraiment besoin d'un modèle probabiliste en ingénierie financière ?. Conférence Méditerranéenne sur l'Ingénierie Sûre des Systèmes Complexes, MISC 2011, May 2011, Agadir, Maroc. hal-00585152v2

HAL Id: hal-00585152

<https://hal-polytechnique.archives-ouvertes.fr/hal-00585152v2>

Submitted on 9 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A-t-on vraiment besoin d'un modèle probabiliste en ingénierie financière ?

Is a probabilistic modeling really useful in financial engineering ?

Michel FLIESS¹, Cedric JOIN^{2,3}, Frédéric HATT⁴

¹ LIX (CNRS, UMR 7161), École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Michel.Fliess@polytechnique.edu

² CRAN (CNRS, UMR 7039), Nancy-Université, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

Cedric.Join@cran.uhp-nancy.fr

³ Équipe NON-A, INRIA Lille – Nord-Europe

⁴ Lucid Capital Management, 2 avenue Charles de Gaulle, BP 351, 2013 Luxembourg, Luxembourg

hatt@lucid-cap.com

« La langue française, sobre et timide, serait encore la dernière des langues si la masse de ses bons écrivains ne l'eût poussée au premier rang en forçant son naturel. »

Antoine de RIVAROL

Discours sur l'universalité de la langue française

Résumé— Une vision nouvelle, sans modèles mathématiques ni outils probabilistes, des chroniques financières permet non seulement de dégager de façon rigoureuse les notions de tendance et de volatilité, mais aussi de fournir des instruments de calculs efficaces, déjà testés avec plein succès en automatique et en signal. Elle repose sur un théorème publié en 1995 par P. Cartier et Y. Perrin. On utilise ces résultats pour esquisser une gestion dynamique des portefeuilles et de stratégies, qui fait fi de tout calcul d'optimisation globale. On présente de nombreuses simulations numériques.

Abstract— A new standpoint on financial time series, without the use of any mathematical model and of probabilistic tools, yields not only a rigorous approach of trends and volatility, but also efficient calculations which were already successfully applied in automatic control and in signal processing. It is based on a theorem due to P. Cartier and Y. Perrin, which was published in 1995. The above results are employed for sketching a dynamical portfolio and strategy management, without any global optimization technique. Numerous computer simulations are presented.

Mots-clés— Finance quantitative, gestion dynamique de portefeuilles, stratégies, chroniques, tendances, volatilité, filtres de Kalman, débruitage, dérivation numérique, analyse non standard.

Key words— Quantitative finance, dynamic portfolio management, strategy, time series, trends, volatility, Kalman filters, noise removal, numerical differentiation, nonstandard analysis.

I. INTRODUCTION

Économétrie et finance quantitative placent probabilités et statistiques au cœur des fondements théoriques et des calculs pratiques. Ce rôle, également prépondérant dans beaucoup d'autres sciences appliquées, ne va pas sans poser de redoutables questions épistémologiques. Que l'on songe aux réflexions, anciennes, de Keynes [34] et Borel [6], et, à celles, plus récentes, de Hacking [28] et Jaynes [31], et, d'un point de vue plus concret, de Beuzamy [2].

La crise financière présente a mis au centre du débat les critiques dévastatrices de Mandelbrot [41] et de certains de ses épigones, comme Taleb [55]. En voici un résumé, sans doute trop lapidaire : on veut hisser les probabilités sur un socle plus solide, de façon à pallier les carences ayant conduit aux impasses actuelles. Mentionnons, par exemple, la recherche [41] de lois de probabilités à « queues épaisses¹ » pour prendre en compte les événements extrêmes, rares, recherche, qui de l'aveu même de [41], n'a pas eu les retombées espérées en raison d'un calibrage malaisé, pour ne pas dire impossible.

Les auteurs prônent, ici, une vision sans probabilités ni statistiques. La citation suivante, empruntée à [16], en donne l'esprit :

« *Is it not therefore quite naïve to wish to exhibit well defined probability laws in quantitative finance, in econo-*

1. *Fat tails*, en anglais.

mics and management, and in other social and psychological sciences, where the environmental world is much more involved than in any physical system? In other words a mathematical theory of uncertain sequences of events should not necessarily be confused with probability theory. To ask if the uncertainty of a "complex" system is of probabilistic nature is an undecidable metaphysical question which cannot be properly answered via experimental means. It should therefore be ignored. »

Les deux thèmes suivants fourniront matière à illustration :

1. Les *séries temporelles*, ou *chronologiques*, appelées ici *chroniques*, sont l'un des piliers de l'économétrie. Leur emploi est généralisé, y compris en finance. Une théorie mathématique élégante existe (voir, par exemple, [27], [29]) dans le cas stationnaire avec des modèles probabilistes linéaires. Les opérations pour se ramener au stationnaire, comme la « désaisonnalisation », l'enlèvement de tendances, la « co-intégration », sont délicates et ne conduisent pas à des prédictions vraiment satisfaisantes. Le recours à des modèles non linéaires n'améliore guère la situation.

2. La « théorie moderne du portefeuille »² de Markowitz ([42], [43]), qui vise un bon compromis entre rendements et risques, est l'une des premières, sinon la première, manifestations de l'emprise des probabilités en finance quantitative³. Sa mise en œuvre concrète, qui repose sur une matrice de variances/covariances, est lourde et cache des chausse-trapes vicieux⁴. Le passage du statique à une gestion dynamique fait souvent appel à la commande optimale stochastique, promue par des célébrités de la finance mathématique, telles Samuelson [52] et Merton [46]. La complexité formidable de l'optimisation mathématique, surtout si elle est dynamique et stochastique, nuit à toute implantation numérique, à moins de simplifications drastiques. C'est de plus une gageure, à notre avis, que vouloir décrire l'évolution des prix et des rendements par des équations différentielles stochastiques, qui sont, rappelons-le, un pilier de la mathématique financière depuis quarante ans (voir, par exemple, [9], [30], [46], [51], [59])⁵.

C'est la renonciation même à un modèle précis, qui nous indique la voie pour surmonter ces difficultés. Elle repose sur

- l'existence de moyennes, ou tendances⁶, pour les chroniques financières, qui
- est une hypothèse fondamentale en *analyse technique*⁷,
- a été démontrée pour la première fois, apparemment, en [16] ;
- une approche précise et exploitable de la *volatilité* [20], qui manquait.

2. *Modern portfolio theory*, en anglais, souvent abrégé en *MPT*.

3. Voir, par exemple, les excellents cours [4], [5].

4. Voir, par exemple, [37] pour un résumé court, mais lumineux, de ces difficultés, et des références complémentaires.

5. Signalons d'autres tentatives, « moins théoriques », comme, par exemple, les réseaux de neurones [39].

6. L'emploi du terme anglais *trend* est courant.

7. L'analyse technique (voir, par exemple, [3], [35]), souvent méprisée par les théoriciens de la finance quantitative, est d'un emploi courant chez les praticiens.

Ces notes, qui esquissent un point de vue nouveau sur la gestion dynamique sont à rapprocher de la « commande sans modèle », due à deux des auteurs ([15], [23]). Les succès remarquables déjà obtenus (voir les références de [23]) s'expliquent par l'inutilité d'un « bon » modèle mathématique, le plus souvent impossible à écrire à cause de la complexité des phénomènes physiques, comme le frottement, et des perturbations externes inconnues, pour obtenir des lois de commande performantes et faciles à implanter.

Le § II reprend la vision, née en [16], des chroniques, basée sur le théorème de Cartier-Perrin [8]. Le § III esquisse une approche entièrement nouvelle de la gestion dynamique de portefeuilles et de stratégies, qui évite les calculs lourds d'optimisation. Des simulations numériques illustrent et valident notre démarche. La conclusion du § IV discute brièvement des filtres de Kalman.

II. CHRONIQUES⁸

A. Préliminaires

A.1 Analyse technique

On sait que tout signal « utile » est noyé dans du bruit. S'il est additif, cela correspond à

$$\text{signal observé} = \text{signal utile} + \text{bruit} \quad (1)$$

Trouver comment récupérer les informations pertinentes, grâce à des méthodes efficaces de débruitage et d'estimation, est une des tâches essentielles des sciences de l'ingénieur et des mathématiques appliquées. En finance, seule l'*analyse technique* ([3], [35]) se rapproche de ce point de vue car elle voit toute chronique des prix d'un actif comme des fluctuations rapides autour d'une *tendance*⁹. Alors, (1) devient :

$$\text{prix} = \text{tendance} + \text{fluctuations rapides} \quad (2)$$

Les mathématiques financières actuelles, par contre, qui insistent sur le fait que les prix suivent une marche aléatoire¹⁰, nient ces tendances. L'analyse technique, fort appréciée de maints gérants¹¹, est donc rejetée par la finance théorique « moderne ».

A.2 Vers une nouvelle théorie des chroniques

La théorie des chroniques, telle qu'on

- la trouve aujourd'hui dans des cours comme [27], [29],
- l'utilise non seulement en finance quantitative, mais aussi en économétrie et dans bien d'autres domaines des sciences appliquées,

ignore ces tendances¹². Or ces tendances existent d'après le théorème de Cartier-Perrin [8], publié en 1995, qui est

8. On préfère, comme déjà dit dans l'introduction, cette terminologie, plus élégante, à celle de *séries temporelles*, ou *chronologiques*.

9. On emploie souvent le terme anglais *trend*.

10. Ces marches aléatoires se rattachent à l'« hypothèse de l'efficience du marché », *efficient market hypothesis* en anglais, due à Fama [13]. Une littérature considérable est consacrée à cette question capitale. On en trouve un résumé dans certains cours cités en bibliographie. Voir, par exemple, [5], [59].

11. On aurait pu user du terme anglais *trader*, aujourd'hui universel.

12. Le mot *tendance* possède en [27], [29], et dans tous les cours actuels sur les chroniques, un autre sens.

au cœur de la refondation de l'analyse des chroniques, entamée depuis [16]. On a pu ainsi réexaminer ([17], [18], [19], [20]) bien des points d'ingénierie financière : nouveaux indicateurs, coefficient bêta de risque, volatilité, couverture, etc. Ce théorème doit, à notre avis, être compris comme un résultat important et nouveau de la théorie des fonctions d'une variable réelle [7]. Il est, comme rappelé plus bas, exprimé dans le langage de l'*analyse non standard*, trop ignoré. Insistons, ici, sur l'absence de toute loi de probabilités pour établir la décomposition (2).

Remarque 1 : Notons que des travaux isolés sur les chroniques, comme le livre d'Andersen [1], vieux de plus de 80 ans et donc antérieur à la doxa dominante, sont moins étrangers aux tendances. Le récent et excellent manuel de Mélard [45] tranche aussi avec la plupart des cours universitaires disponibles.

A.3 Aspects calculatoires

Les adeptes de l'analyse techniques savent depuis longtemps (voir, par exemple, [3], [35]) qu'une bonne façon de dégager la tendance à partir de (2) gagne à s'inspirer de la pratique des ingénieurs pour traiter (1). Nos méthodes de débruitage et de dérivation numérique (voir [24], [44]), de nature algébrique et testées avec plein succès dans de multiples exemples concrets (voir, par exemple, [56], [57]), améliorent les *moyennes mobiles*, courantes en analyse technique.

B. Analyse non standard et théorème de Cartier-Perrin

B.1 Généralités

L'*analyse non standard*, inventée par Robinson [50] il y a cinquante ans, accomplit un rêve ancien en donnant une base enfin rigoureuse, grâce à la logique mathématique, aux notions d'« infiniment petit » et d'« infiniment grand ». On en doit à Nelson [47] une présentation plus claire et plus accessible, explicitée en [10], [11], [49].

B.2 Définition des chroniques

Soit l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Introduisons, comme souvent en analyse non standard, la *discrétisation infinitésimale*

$$\mathfrak{T} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\nu = 1\}$$

où $t_{i+1} - t_i$, $0 \leq i < \nu$, est *infinitésimal*, c'est-à-dire « très petit ». Une *chronique* $X(t)$ est une fonction $X : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$.

B.3 Intégrabilité et continuité

La *mesure de Lebesgue* sur \mathfrak{T} est la fonction m définie sur $\mathfrak{T} \setminus \{1\}$ par $m(t_i) = t_{i+1} - t_i$. La mesure d'un intervalle $[c, d] \subset \mathfrak{T}$, $c \leq d$, est sa longueur $d - c$. Posons

$$\int_{[c, d]} f dm = \sum_{t \in [c, d]} f(t) m(t)$$

pour l'intégrale sur $[c, d]$ de la fonction $f : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *S-intégrable* si, et seulement si, pour tout intervalle $[c, d]$, l'intégrale $\int_{[c, d]} |f| dm$ est *limité*, et infinitésimal, si $d - c$ l'est.

La fonction f est dite *S-continue* en $t_i \in \mathfrak{T}$ si, et seulement si, $t_i \simeq \tau \implies f(t_i) \simeq f(\tau)$ ¹³. La fonction f est dite

13. $x \simeq y$ signifie que $x - y$ est infinitésimal.

presque continue si, et seulement si, elle est *S-continue* sur $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{R}$, où \mathfrak{R} est *rare*¹⁴. On dit que f est *Lebesgue-intégrable* si, et seulement si, elle est *S-intégrable* et *presque continue*.

B.4 Fluctuations rapides

Une fonction $h : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à *fluctuations*, ou *oscillations*, *rapides* si, et seulement si, elle est

- *S-intégrable*,
- $\int_A h dm$ est infinitésimal pour tout A *quadrable*¹⁵.

B.5 Décomposition de Cartier-Perrin

Toute chronique *S-intégrable* $X : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la décomposition de Cartier-Perrin¹⁶ :

$$\boxed{X(t) = E(X)(t) + X_{\text{fluctuation}}(t)} \quad (3)$$

où

- $E(X)(t)$, qui est Lebesgue-intégrable, est l'*espérance*, aussi appelée *tendance*, ou encore, en suivant la terminologie américaine, *trend* ;
- $X_{\text{fluctuation}}(t)$ est à *fluctuations rapides*.

La décomposition (3) est unique à un infiniment petit additif près.

B.6 Variances et covariances

Définir, dans ce cadre, l'analogue de la (co)variance, et, donc, de la *volatilité* est immédiat (voir [20] pour plus de détails) :

1. La *covariance* de deux chroniques $X(t)$ et $Y(t)$ est

$$\begin{aligned} \text{cov}(XY)(t) &= E((X - E(X))(Y - E(Y)))(t) \\ &\simeq E(XY)(t) - E(X)(t) \times E(Y)(t) \end{aligned}$$

2. La *variance* de la chronique $X(t)$ est

$$\begin{aligned} \text{var}(X)(t) &= E((X - E(X))^2)(t) \\ &\simeq E(X^2)(t) - (E(X)(t))^2 \end{aligned}$$

3. La *volatilité* de $X(t)$ est l'écart-type correspondant :

$$\text{vol}(X)(t) = \sqrt{\text{var}(X)(t)} \quad (4)$$

Généraliser aux moments d'ordre supérieur est trivial.

C. Débruitage et estimation

Le débruitage, c'est-à-dire, ici, l'atténuation des fluctuations rapides, découle de leur définition même en § II-B.4 : l'intégration et, plus généralement, tout filtre passe-bas mettent les espérances des chroniques en évidence.

La détermination des dérivées des espérances revient à la dérivation numérique de signaux bruités. C'est, on le sait, un problème d'une grande importance, ayant suscité une littérature considérable en mathématiques appliquées et en ingénierie. On résume grossièrement, ici, une approche nouvelle [44], débutée en [22], qui a déjà modifié

14. L'ensemble \mathfrak{R} est dit *rare* si, et seulement si, pour tout réel standard $\alpha > 0$, il existe un ensemble interne $B \subset A$ tel que $m(B) \leq \alpha$.

15. A est *quadrable* [8] si sa frontière est *rare*.

16. Voir [40] pour une présentation « classique », c'est-à-dire sans analyse non standard.

notre compréhension des questions d'observation, d'identification paramétrique et de diagnostic en automatique non linéaire [24]. La possibilité d'utiliser des intégrales pour estimer les dérivées remonte au moins, comme notée en [38], à Lanczos [36] :

$$\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h \tau x(t + \tau) d\tau = \dot{x}(t) + O(h^2)$$

Soit, pour illustrer ce qui précède, $x(t)$ un signal dont on veut estimer la dérivée première. Approchons $x(t)$ autour de $t = 0$ par le polynôme de Taylor tronqué jusqu'à l'ordre de la dérivation souhaitée, ici 1.

Soit, pour simplifier, un signal polynômial de degré 1 :

$$p(t) = a_0 + a_1 t$$

Avec les notations classiques du calcul opérationnel (cf. [60]), il vient, pour $t \geq 0$,

$$P(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2}$$

Des calculs élémentaires mènent à

$$P(s) + s \frac{dP(s)}{ds} = -\frac{a_1}{s^2}.$$

Avant de revenir au domaine temporel, une multiplication par s^{-N} , avec $N > 1$, $N = 2$ par exemple, est nécessaire pour éviter les dérivations par rapport au temps et obtenir uniquement des intégrales :

$$s^{-2}P(s) + s^{-1} \frac{dP(s)}{ds} = -s^{-4}a_1.$$

On revient au domaine temporel en rappelant (cf. [60]) que $\frac{d}{ds}$ correspond à la multiplication par $-t$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{6 \left(\int_{t_0}^t \tau x(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} x(\kappa) d\kappa d\tau \right)}{t^3} \\ &= \frac{6 \left(\int_{t_0}^t \tau x(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t (t - \tau) x(\tau) d\tau \right)}{t^3} \\ &= \frac{6 \int_{t_0}^t (\tau x(\tau) - (t - \tau) x(\tau)) d\tau}{t^3} \end{aligned} \quad (5)$$

Les étapes précédentes ne sont pas univoques et une multitude de formules de type (5) sont possibles. La généralisation à des polynômes de degré quelconque est immédiate. On estime les dérivées d'une fonction analytique, en tronquant son développement de Taylor, c'est-à-dire en se ramenant au cas précédent. La discrétisation conduit à un filtre numérique.

Remarque 2 : Voir [44] et, aussi, [38] pour des développements importants sur les retards associés à ces estimateurs. Voir, par exemple, [26] pour une implantation pratique.

D. Rendements

D.1 Généralités

Le *rendement logarithmique*¹⁷, sur l'intervalle de temps $\Delta T > 0$, de l'actif \mathfrak{A} , dont le prix à l'instant t est $X(t)$, est la chronique $R_{\Delta T}$ définie par

$$\begin{aligned} R_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t) &= \ln \left(\frac{X(t)}{X(t - \Delta T)} \right) \\ &= \ln X(t) - \ln X(t - \Delta T) \end{aligned}$$

Définissons le rendement logarithmique *normalisé* par

$$r_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t) = \frac{R(t)}{\Delta T}$$

La *moyenne* de $r_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t)$ est

$$\bar{r}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t) = \frac{E(\ln X)(t) - E(\ln X)(t - \Delta T)}{\Delta T} \quad (6)$$

Si $E(\ln X)$ est dérivable,

$$\bar{r}(\mathfrak{A})(t) = \frac{d}{dt} E(\ln X)(t)$$

est le *rendement logarithmique instantané*.

D.2 Volatilité d'un actif

La *volatilité historique*, ou, plus brièvement, la *volatilité*, de \mathfrak{A} est

$$\mathbf{vol}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t) = \sqrt{E(r_{\Delta T}(\mathfrak{A}) - \bar{r}_{\Delta T}(\mathfrak{A}))^2(t)} \quad (7)$$

D'où

$$\mathbf{vol}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t) \simeq \sqrt{E((r_{\Delta T}(\mathfrak{A}))^2(t) - (\bar{r}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t))^2)}$$

D.3 Ratio de Sharpe

Le *ratio de Sharpe* ([53], [54]) d'un actif \mathfrak{A} est une mesure très populaire de la performance d'un portefeuille (voir, par exemple, [5], [51], [59]). Il s'écrit, ici,

$$\text{SR}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t) = \frac{\bar{r}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t)}{\mathbf{vol}_{\Delta T}(\mathfrak{A})(t)} \quad (8)$$

On souhaite un ratio de Sharpe élevé : fort rendement, c'est-à-dire numérateur grand, et risque faible, c'est-à-dire dénominateur petit.

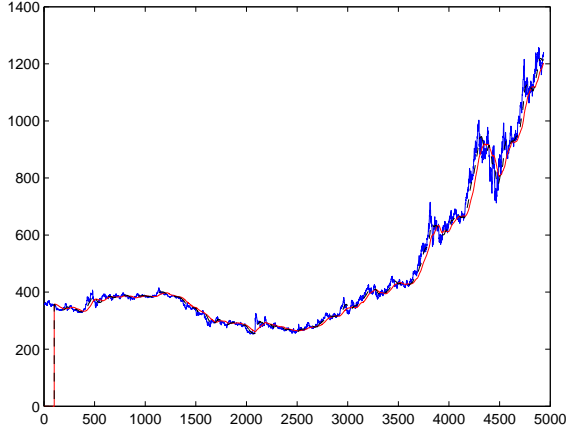
E. Illustrations numériques

Soit le cours journalier de l'or du 30 septembre 1991 au 27 août 2010.

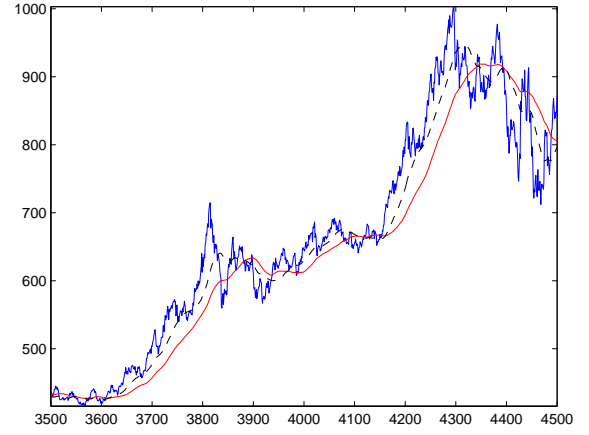
E.1 Comparaison avec une moyenne glissante classique

La figure 1 compare une moyenne mobile avec la méthodologie résumée au § II-C. Quoique toutes deux utilisent 100 points, c'est-à-dire 100 jours, la seconde diminue énormément le retard d'estimation, sans affaiblir le débruitage.

17. Renvoyons à [20] pour plus de détails.



(a) Cours de l'or (—) et moyenne glissante classique (—); espérance proposée (—)



(b) Zoom de 1-(a)

Fig. 1
CALCULS D'ESPÉRANCES

E.2 Dérivation numérique

La figure 2 compare deux approches :

- l'une obtenue, comme souvent en analyse technique, en deux étapes :
 - une moyenne mobile sur 50 jours,
 - une différence finie pour la dérivation,
- l'autre, qui demande davantage de points, obtenue selon une méthodologie déduite du § II-C.

La première est bruitée, ce qui n'est pas le cas de la seconde qui, soulignons-le, ne s'accompagne pas de retard supplémentaire.

E.3 Estimation des fluctuations rapides

La figure 3 représente deux estimations des fluctuations rapides :

- L'une, calculée grâce à une moyenne glissante de 100 jours, classique, fournissant l'espérance, ne fluctue pas vraiment autour de 0, car elle possède une composante « basse fréquence ».
- L'autre, calculée par nos techniques, est bien meilleure. Elle devrait servir à construire des indicateurs d'*arrêt de perte*¹⁸.

E.4 Prédiction de volatilité

On remarque une différence notable entre les figures 4-(a) et 4-(b), représentant les rendements de l'or avec deux intervalles de temps. La figure 5 donne la volatilité (7) et une prédiction à 20 jours, calculée par une méthode standard d'interpolation. Les résultats semblent plus prometteurs que ceux obtenus avec les méthodes de type *ARCH/GARCH*, populaires depuis Engle (voir [12]).

Remarque 3 : La détection de *ruptures* de [21] a déjà été employée en [17], [18], [19], [20] pour fournir des prévisions prometteuses de changements brutaux. Le manque de place nous empêche de reprendre, ici, ces calculs.

18. *Stop loss*, en anglais.

III. GESTION DYNAMIQUE DE PORTEFEUILLES ET DE STRATÉGIES

A. Préliminaires

La valeur d'un portefeuille \mathfrak{P} , à N actifs \mathfrak{A}_i , $i = 1, \dots, N$, de valeurs $P_i(t)$ à l'instant $t \geq 0$, est

$$P(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) P_i(t) \quad (9)$$

Le choix des quantités $x_i(t)$, $x_i(t) \geq 0$, d'actifs \mathfrak{A}_i , $i = 1, \dots, N$, assure la gestion dynamique du portefeuille. On suppose $x_i(t)$ sans fluctuations rapides. Donc

$$E\left(\prod_{i=1}^N (x_i P_i)^{\nu_i}\right)(t) = \prod_{i=1}^N (x_i(t))^{\nu_i} (E(P_i)^{\nu_i})(t) \quad (10)$$

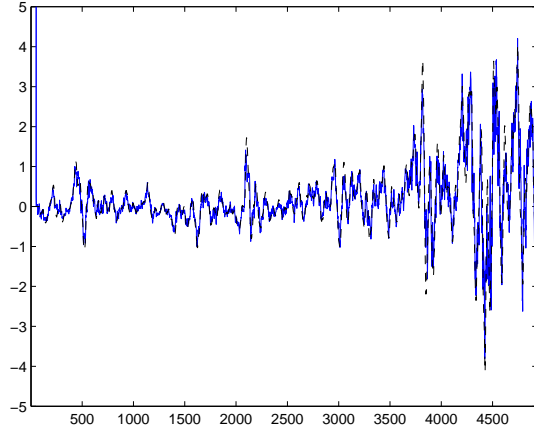
B. Amélioration dynamique des performances

On cherche à augmenter le ratio de Sharpe (8) du portefeuille \mathfrak{P} . Supposons, pour simplifier les calculs, que pendant l'intervalle ΔT , fixé, les quantités $x_i(t)$ restent constantes. D'après les formules (6), (7), (9) et (10), il est loisible de considérer ce ratio comme fonction de t , $x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, fonction que nous ne chercherons pas à écrire explicitement¹⁹. On associe à ce ratio un système de coordonnées t, x_1, \dots, x_N, y et l'hypersurface $\text{shr}_{\Delta T}(\mathfrak{P})$, dite de Sharpe, définie par $y = \text{shr}_{\Delta T}(\mathfrak{P})$. Une hypothèse, naturelle, de dérivabilité locale des tendances permet de déterminer le plan tangent en un point courant de $\text{shr}_{\Delta T}(\mathfrak{P})$. Introduisons, alors, les estimées de $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, N$, calculées selon les techniques de [18].

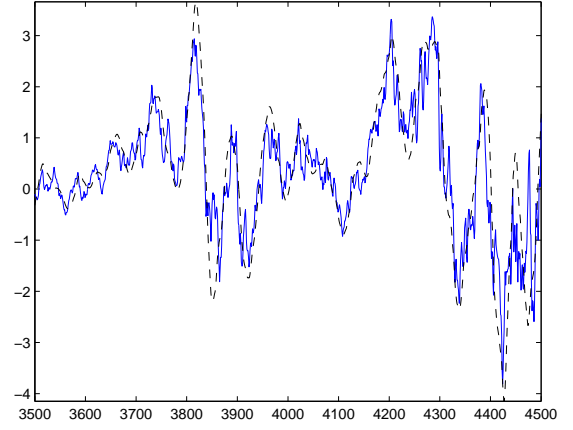
Notons dx_i l'accroissement « infinitésimal », c'est-à-dire « petit », de x_i , $i = 1, \dots, N$. Faisons, pour simplifier, l'hypothèse d'éviter tout effet de *levier*²⁰, qui se traduit

19. Une telle écriture deviendrait aisée en remplaçant le rendement logarithmique par l'arithmétique.

20. *Leverage*, en anglais.

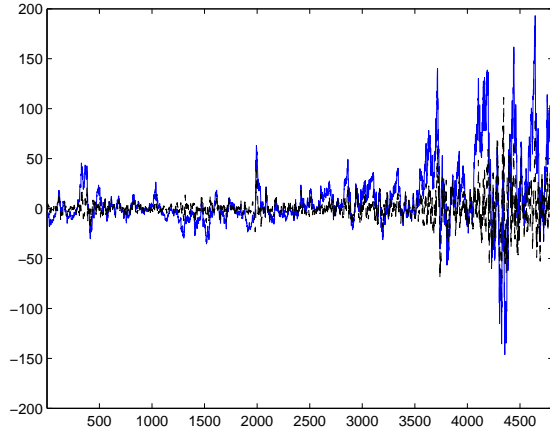


(a) Dérivations numériques classique (—) et nouvelle (---)

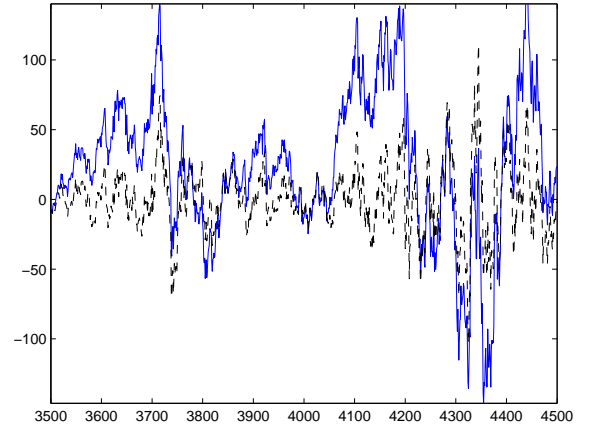


(b) Zoom de 2-(a)

Fig. 2
DÉRIVATIONS NUMÉRIQUES



(a) $X_{\text{fluctuation}}(t)$ déduit d'une moyenne glissante classique (—) et $X_{\text{fluctuation}}(t)$ proposé (---)



(b) zoom de la figure 3-(a)

Fig. 3
ESTIMATION DES FLUCTUATIONS RAPIDES

par

$$P_1(t)dx_1 + \dots + P_N(t)dx_N = 0$$

Voici une esquisse des règles permettant l'amélioration dynamique des performances :

- Si $\frac{\partial y}{\partial x_i} > 0$ (resp. < 0), on choisit $dx_i > 0$ (resp. < 0).
- Si $\frac{\partial y}{\partial x_{i_1}} > 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x_{i_2}} > 0$ et si $\frac{\partial y}{\partial x_{i_1}} \gg \frac{\partial y}{\partial x_{i_2}}$, on fait croître plutôt x_{i_1} .
- Si $\frac{\partial y}{\partial x_{i_1}} < 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x_{i_2}} < 0$ et si $\frac{\partial y}{\partial x_{i_1}} \ll \frac{\partial y}{\partial x_{i_2}}$, on fait décroître plutôt x_{i_1} .
- Si $\frac{\partial y}{\partial x_i} \simeq 0$, on choisit $dx_i = 0$, à moins que les autres dérivées partielles soient négatives, ce qui conduit à prendre $dx_i > 0$.

Remarque 4 : Ces règles de bon sens, que l'on peut affiner à loisir en

- prenant d'autres critères,

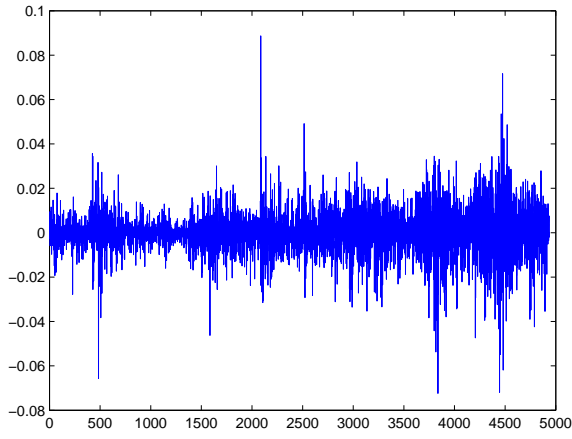
– améliorant plusieurs critères simultanés, abandonnent volontairement la recherche d'un optimum global.

Remarque 5 : Les calculs précédents se généralisent immédiatement à un choix dynamique entre plusieurs stratégies.

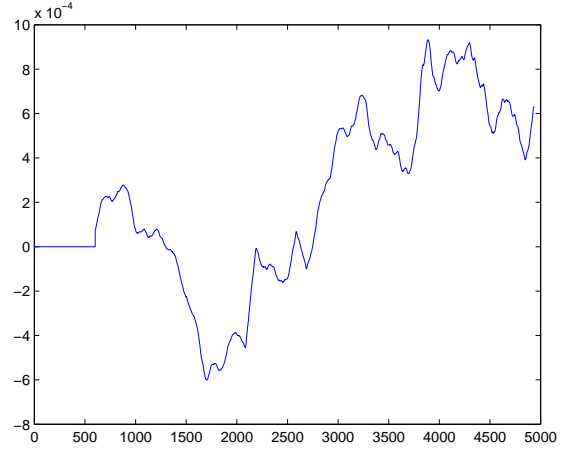
C. Illustrations numériques

On considère, du 28 janvier 1997 au 7 décembre 2010,

- un portefeuille composé de 38 futures, SPX, Dax, Hsi, Nky, Ndx, Kospi, EUR, GBP, AUD, NZD, CHF, C11, NG1, HO1, Golds, Silver, LMCADS03, C1, W1, S1, RR1, TY1, RX1, OE1, DU1, JPY, US1, FV1, TU1, LC1, SMI, UKX, G1, SPTSX, Pall, CC1, CT1, SB1;
- quatre stratégies pour chaque actif.



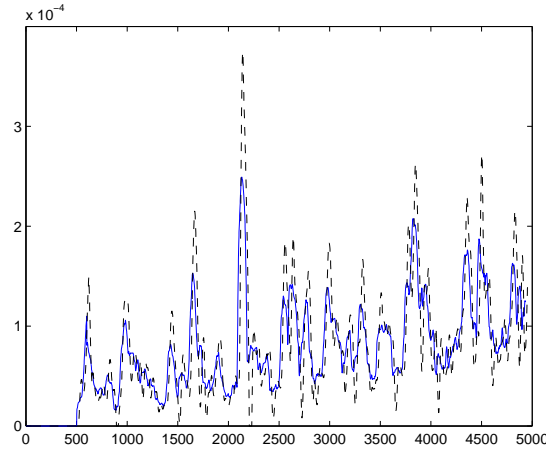
(a) Rendement logarithmique instantané $r_{\Delta T=1}(\mathfrak{A})(t)$



(b) Rendement logarithmique normalisé $\bar{r}_{\Delta T=500}(\mathfrak{A})(t)$

Fig. 4

EXEMPLE DE CALCULS DES RENDEMENTS



(a) Volatilité $\text{vol}_{\Delta T=500}(\mathfrak{A})(t)$ (--) et sa prédiction à 20 jours (-.-)

Fig. 5

VOLATILITÉ DU RENDEMENT NORMALISÉ

On remplace les poids $x_i(t)$ de (9) par $x_i^j(t)$, où i dénote l'actif et j la stratégie. Ici, $1 \leq i \leq 38$, $1 \leq j \leq 4$: l'espace de configuration est de dimension 152. Les graphiques 6-(a) et 6-(b) indiquent, respectivement, l'évolution de ces nouveaux poids et l'évolution des gains, qui sont de 15% par an, en moyenne, avec un ratio de Sharpe de 1.5 par an, en moyenne. Les baisses²¹, ou pertes, ne dépassent pas 10%.

Remarque 6 : Le portefeuille initial, en $t = 0$, est équiréparti, c'est-à-dire *a priori* non optimal. Plutôt qu'utiliser les techniques actuelles d'optimisation statique, lourdes comme déjà dit en introduction, il semble préférable de recourir à la démarche précédente. Les données historiques permettent de démarrer nos calculs en $t < 0$ avec un portefeuille équiréparti. Le résultat obtenu en $t = 0$ est le

portefeuille initial.

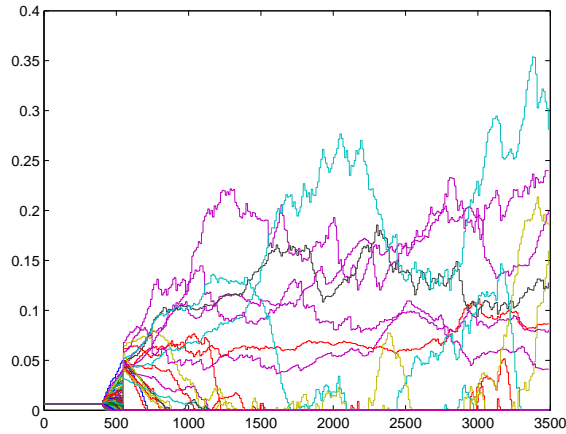
IV. CONCLUSION

C'est la majeure part de la finance quantitative que nous comptons embrasser à terme. L'absence de modèles probabilistes *a priori* devrait mener à des méthodes plus simples et efficaces.

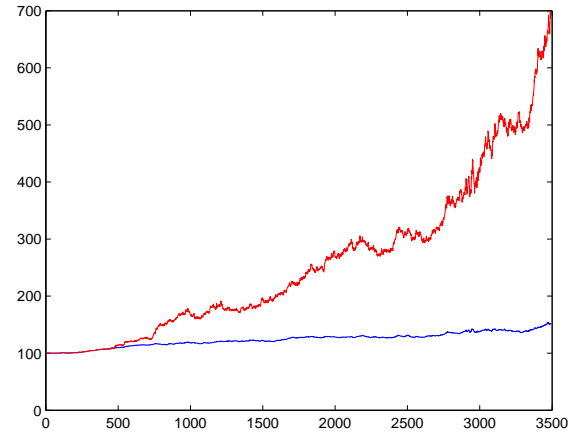
Les modèles probabilistes ne tiennent pas seulement une place, très exagérée à notre avis, en économétrie et en finance, mais aussi en automatique et en signal, domaines plus traditionnels de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Nous nous contenterons dans cette courte conclusion d'évoquer les filtres de Kalman ([32], [33]) car ils jouent aussi un rôle en économétrie (voir, par exemple, [27], [29]) et, donc, en finance (voir, par exemple, [58]). En effet, ils

– sont tributaires d'une modélisation précise non seulement de la dynamique, mais aussi de la statistique des

21. *Drawdowns*, en anglais.



(a) Evolution des poids



(b) Valeur du portefeuille avec et sans gestion dynamique

Fig. 6

GESTION D'UN PORTEFEUILLE DE 38 FUTURES

bruits ;

– exigent, comme les correcteurs PID en automatique industrielle, un réglage délicat des gains²².

C'est pourquoi les *reconstructeurs d'état* de [25], où peu importe la statistique des bruits, devraient, les remplacer avantageusement²³, si l'on a foi en un modèle de la dynamique ! Ajoutons que ces reconstructeurs se généralisent sans difficulté, en utilisant les outils du § II-C, au non-linéaire [24]. Ce n'est pas le cas, on ne le sait que trop, des filtres de Kalman.

Remarque 7 : Le filtre de Kalman est employé, par exemple, pour estimer le fameux coefficient bêta (voir, par exemple, [5], [51]), fourni par un modèle linéaire très contesté. Plutôt qu'utiliser nos reconstructeurs, mieux vaut sans doute adopter l'approche sans modèle de [18], [20].

RÉFÉRENCES

- [1] O. ANDERSEN, *Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung – Ein Beitrag zur Analyse von Zeitreihen*, Kurt Schroeder Verlag, 1929.
- [2] B. BEAUZAMY, *Méthodes probabilistes pour l'étude des phénomènes réels*, Société de Calcul Mathématique, 2004.
- [3] T. BÉCHU, E. BERTRAND, J. NEBENZAHL, *L'analyse technique* (6^e éd.), Economica, 2008.
- [4] P. BERTRAND, J.-L. PRIGENT, *Gestion des portefeuilles – Analyse quantitative et gestion structurée*, Economica, 2006.
- [5] Z. BODIE, A. KANE, A.J. MARCUS, *Investments* (7th ed.), McGraw-Hill, 2008.
- [6] E. BOREL, *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Gauthier-Villars, 1939. Réédition : Jacques Gabay, 2009.
- [7] N. BOURBAKI, *Fonctions d'une variable réelle*, Hermann, 1976.
- [8] P. CARTIER, Y. PERRIN, « Integration over finite sets », in F. & M. Diener (Eds): *Nonstandard Analysis in Practice*, Springer, 1995, p. 195-204.
- [9] R.-A. DANA, M. JEANBLANC-PICQUÉ, *Marchés financiers en temps continu* (2^e éd.), Economica, 1998. Traduction anglaise : *Financial Markets in Continuous Time*, Springer, 2003.
- [10] F. DIENER, M. DIENER, « Tutorial », in F. & M. Diener (Eds): *Nonstandard Analysis in Practice*, Springer, 1995, p. 1-21.
- [11] F. DIENER, G. REEB, *Analyse non standard*, Hermann, 1989.
- [12] R.F. ENGLE, « GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics », *J. Economic Perspectives*, t. 15, p. 157-168, 2001.
- [13] E.F. FAMA, « Efficient capital markets: A review of theory and empirical work », *J. Finance*, t. 25, p. 383-417, 1970.
- [14] M. FLIESS, « Analyse non standard du bruit », *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. I-342, p. 797-802, 2006.
- [15] M. FLIESS, C. JOIN, « Commande sans modèle et commande à modèle restreint », *e-STA*, t. 5 (n° 4), p. 1-23, 2008 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00288107/fr/>).
- [16] M. FLIESS, C. JOIN, « A mathematical proof of the existence of trends in financial time series », in *Systems Theory: Modeling, Analysis and Control*, A. El Jai, L. Afifi, E. Zerrik (Eds), Presses Universitaires de Perpignan, 2009, p. 43-62 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00352834/fr/>).
- [17] M. FLIESS, C. JOIN, « Towards new technical indicators for trading systems and risk management », *15th IFAC Symp. System Identif.*, Saint-Malo, 2009 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00370168/fr/>).
- [18] M. FLIESS, C. JOIN, « Systematic risk analysis: first steps towards a new definition of beta », *COGIS*, Paris, 2009 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00425077/fr/>).
- [19] M. FLIESS, C. JOIN, « Delta hedging in financial engineering: towards a model-free setting », *18th Medit. Conf. Control Au-*

22. Un avantage formidable des PID *intelligents*, issus de la commande sans modèle ([15], [23]), est un réglage facile.

23. Cette affirmation s'applique aussi aux *observateurs asymptotiques*, familiers en automatique.

- tomat., Marrakech, 2010 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00479824/fr/>).
- [20] M. FLIESS, C. JOIN, F. HATT, « Volatility made observable at last », 3^{es} J. Identif. Modélisation Expérimentale, Douai, 2011 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00562488/fr/>).
- [21] M. FLIESS, C. JOIN, M. MBOUP, « Algebraic change-point detection », *Applicable Algebra Engin. Commun. Comput.*, t. 21, p. 131-143, 2010.
- [22] M. FLIESS, C. JOIN, M. MBOUP, H. SIRA-RAMIREZ, « Compression différentielle de transitoires bruitées », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. I-339, p. 821-826, 2004.
- [23] M. FLIESS, C. JOIN, S. RIACHY, « Rien de plus utile qu'une bonne théorie : la commande sans modèle », *JN-JD-MACS*, Marseille, 2011 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00581109/fr/>).
- [24] M. FLIESS, C. JOIN, H. SIRA-RAMIREZ, « Non-linear estimation is easy », *Int. J. Model. Identif. Control*, t. 4, p. 12-27, 2008 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00158855/fr/>).
- [25] M. FLIESS, H. SIRA-RAMIREZ, « Reconstructeurs d'état », *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. I-338, p. 91-96, 2004.
- [26] F.A. GARCÍA COLLADO, B. D'ANDRÉA-NOVEL, M. FLIESS, H. MOUNIER, « Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques », *XXII^e Coll. GRETSI*, Dijon, 2009 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00394972/fr/>).
- [27] C. GOURIEROUX, A. MONFORT, *Séries temporelles et modèles dynamiques* (2^e éd.), Economica, 1995. Traduction anglaise : *Time Series and Dynamic Models*, Cambridge University Press, 1997.
- [28] I. HACKING, *The Taming of Chance*, Cambridge University Press, 1990.
- [29] J.D. HAMILTON, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [30] J.C. HULL, *Options, Futures, and Other Derivatives* (7th ed.), Prentice Hall, 2009. Traduction française de la 6^e éd. : *Options, futures et autres actifs dérivés*, Pearson, 2007.
- [31] E.T. JAYNES, *Probability Theory – The Logic of Science*, Cambridge University Press, 2004.
- [32] R.R. KALMAN, « A new approach to linear filtering and prediction problems », *Trans. ASME – J. Basic Engin.*, t. D-82, p. 35-45, 1960.
- [33] R.R. KALMAN, R.S. BUCY, « New results in linear prediction and filtering theory », *Trans. ASME – J. Basic Engin.*, t. D-83, p. 95-100, 1961.
- [34] J.M. KEYNES, *A Treatise on Probability*, Macmillan, 1921.
- [35] C.D. KIRKPATRICK, J.R. DAHLQUIST, *Technical Analysis: The Complete Resource for Financial Market Technicians* (2nd ed.), FT Press, 2010.
- [36] C. LANCZOS, *Applied Analysis*, Prentice-Hall, 1956.
- [37] E. LEFEUVRE, *La logique du hasard*, Eyrolles, 2010.
- [38] D. LIU, O. GIBARU, W. PERRUQUETTI, « Differentiation by integration with Jacobi polynomials », *J. Comput. Applied Math.*, t. 235, p. 3015-3032, 2011.
- [39] Y. LIU, X. YU, J. HAN, « Sharpe ratio-oriented active trading: a learning approach », in Coello Coello C.A., de Albornoz A., Sucar L.E., Battistutti O.C. (Eds.): *MICAI 2002: Advances in Artificial Intelligence*, Lect. Notes Artif. Intel., vol. 2313, p. 331-339, Springer, 2002.
- [40] C. LOBRY, T. SARI, « Nonstandard analysis and representation of reality », *Int. J. Control*, t. 81, p. 517-534, 2008.
- [41] N. MANDELBROT, R.L. HUDSON, *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books, 2004. Traduction française : *Une approche fractale des marchés : Risquer, perdre et gagner*, Odile Jacob, 2005.
- [42] H.M. MARKOWITZ, « Portfolio selection », *J. Finance*, t. 7, p. 77-91, 1952.
- [43] H.M. MARKOWITZ, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, 1959.
- [44] M. MBOUP, C. JOIN, M. FLIESS, « Numerical differentiation with annihilators in noisy environment », *Numer. Algor.*, t. 50, p. 439-467, 2009.
- [45] G. MÉLARD, *Méthodes de prévision à court terme* (2^e éd.), Éd. Univ. Bruxelles & Ellipses, 2007.
- [46] R. MERTON, *Continuous-Time Finance* (rev. ed.), Blackwell, 1992.
- [47] E. NELSON, « Internal set theory », *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 83, p. 1165-1198, 1977.
- [48] H. PHAM, *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, Springer, 2007. Traduction anglaise : *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Springer, 2009.
- [49] A. ROBERT, *Analyse non standard*, Presses polytechniques romandes, 1985. Traduction anglaise : *Nonstandard Analysis*, Wiley, 1988.
- [50] A. ROBINSON, *Non-standard Analysis* (revised ed.), Princeton University Press, 1996.
- [51] T. RONCALLI, *La gestion d'actifs quantitative*, Economica, 2010.
- [52] P. SAMUELSON, « Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming », *Review Economics Statistics*, t. 51, p. 239-246, 1969.
- [53] W.F. SHARPE, « Mutual fund performance », *J. Business*, t. 39, p. 119-138, 1966.
- [54] W.F. SHARPE, « The Sharpe ratio », *J. Portfolio Management*, t. 21, p. 49-58, 1994.
- [55] N.N. TALEB, *The Black Swan*, Random House, 2007. Traduction française : *Le cygne noir : La puissance de l'imprévisible*, Les Belles Lettres, 2008.
- [56] J. VILLAGRA, B. D'ANDRÉA-NOVEL, S. CHOI, M. FLIESS, H. MOUNIER, « Robust stop-and-go control strategy: an algebraic approach for nonlinear estimation and control », *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, t. 7, p. 270-291, 2009 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00419445/fr/>).
- [57] J. VILLAGRA, B. D'ANDRÉA-NOVEL, M. FLIESS, H. MOUNIER, « A diagnosis-based approach for tire-road forces and maximum friction estimation », *Control Eng. Practice*, t. 19, p. 174-184, 2011 (accessible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00533586/fr/>).
- [58] C. WELLS, *The Kalman Filter in Finance*, Springer, 1996.
- [59] P. WILMOTT, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, 3 volumes (2nd ed.), Wiley, 2006.
- [60] K. YOSIDA, *Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions* (traduit du japonais), Springer, 1984.